

संबंध एवं फलन

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» कार्तीय गुणन की अवधारणा

प्रश्न 1 (आसान). यदि $P = \{\text{गुलाब, लिली}\}$ और $Q = \{\text{लाल, पीला}\}$ हो, तो $P \times Q$ क्या होगा?

उत्तर – $P \times Q = \{(\text{गुलाब, लाल}), (\text{गुलाब, पीला}), (\text{लिली, लाल}), (\text{लिली, पीला})\}$

प्रश्न 2 (आसान). यदि समुच्चय $X = \{A, B\}$ और $Y = \{1, 2\}$ है, तो $Y \times X$ क्या होगा?

उत्तर – $Y \times X = \{(1, A), (1, B), (2, A), (2, B)\}$

प्रश्न 3 (मध्यम). यदि $A = \{a, b, c\}$ और $B = \{1, 2\}$ है, तो $A \times B$ में कितने अवयव होंगे? उन्हें सूचीबद्ध भी कीजिए।

उत्तर – $A \times B$ में $3 \times 2 = 6$ अवयव होंगे। $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

प्रश्न 4 (कठिन). यदि $P = \{+, -\}$ और $Q = \{1, 2, 3\}$ है, तो $Q \times P$ ज्ञात कीजिए और बताएं कि इसमें कितने क्रमित युग्म हैं।

उत्तर – $Q \times P = \{(1, +), (1, -), (2, +), (2, -), (3, +), (3, -)\}$ । इसमें $3 \times 2 = 6$ क्रमित युग्म हैं।

» कार्तीय गुणन के गुणधर्म

प्रश्न 5 (आसान). यदि $P = \{\text{आम, केला}\}$ और $Q = \{\text{लाल, पीला}\}$, तो $n(P \times Q)$ क्या होगा?

उत्तर – $n(P \times Q) = 2 \times 2 = 4$

प्रश्न 6 (आसान). यदि $(a + 5, 4) = (7, b - 1)$, तो a और b का मान ज्ञात करें।

उत्तर – $a = 2, b = 5$

प्रश्न 7 (मध्यम). यदि समुच्चय X में 4 अवयव हैं और Y में 0 अवयव हैं, तो $n(X \times Y)$ क्या होगा?

उत्तर – $n(X \times Y) = 4 \times 0 = 0$ (क्योंकि एक भी समुच्चय खाली होने पर कार्तीय गुणन भी खाली होता है)

प्रश्न 8 (कठिन). यदि A एक अपरिमित समुच्चय है और $B = \{0, 1\}$, तो $A \times B$ कैसा समुच्चय होगा? परिमित या अपरिमित?

उत्तर – $A \times B$ अपरिमित समुच्चय होगा, क्योंकि A अपरिमित है।

» संबंध की परिभाषा और निरूपण

प्रश्न 9 (आसान). अगर $A = \{a, b\}$ और $B = \{1, 2\}$ है, तो $A \times B$ क्या होगा?

उत्तर – $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$

प्रश्न 10 (आसान). ऊपर दिए गए $A \times B$ में से, संबंध $R = \{(a, 1), (b, 2)\}$ क्या यह $A \times B$ का उपसमुच्चय है?

उत्तर – हाँ, $R, A \times B$ का एक उपसमुच्चय है।

प्रश्न 11 (मध्यम). मान लीजिए $P = \{1, 2, 3\}$ और $Q = \{2, 3, 4\}$ । संबंध R को ' P से Q में $x > y$ ' के रूप में परिभाषित करें। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

उत्तर – $R = \{(3, 2)\}$

प्रश्न 12 (कठिन). समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर एक संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि $R = \{(x, y) : x, y \text{ को विभाजित करता है और } x < y\}$ । R को रोस्टर रूप में लिखिए और उसका 'प्रांत' (domain) और 'परिसर' (range) भी बताइए।

उत्तर – $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$ । प्रांत = $\{1, 2\}$, परिसर = $\{2, 3, 4\}$

» संबंध का प्रांत, परिसर और सह-प्रांत

प्रश्न 13 (आसान). यदि $R = \{(a, b), (c, d), (e, f)\}$ एक संबंध है, तो इसका प्रांत क्या होगा?

उत्तर – $\{a, c, e\}$

प्रश्न 14 (आसान). यदि एक संबंध $R = \{(3, 5), (4, 6)\}$ है, तो इसका परिसर क्या होगा?

उत्तर – $\{5, 6\}$

प्रश्न 15 (मध्यम). समुच्चय $X = \{1, 2, 3\}$ से समुच्चय $Y = \{a, b, c\}$ में एक संबंध $R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ है। इस संबंध का सह-प्रांत क्या है?

उत्तर – $\{a, b, c\}$

प्रश्न 16 (कठिन). माना $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर एक संबंध $R = \{(x, y) : x, y \text{ को विभाजित करता है}\}$ । इस संबंध का प्रांत, परिसर और सह-प्रांत ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

प्रांत = $\{1, 2, 3, 4\}$

परिसर = $\{1, 2, 3, 4\}$

सह-प्रांत = $\{1, 2, 3, 4\}$

» संबंधों की कुल संख्या

प्रश्न 17 (आसान). यदि $n(P) = 1$ और $n(Q) = 2$, तो P से Q में बनने वाले संबंधों की कुल संख्या कितनी होगी?

उत्तर – $2^{(1 \times 2)} = 2^2 = 4$

प्रश्न 18 (आसान). समुच्चय $C = \{x, y\}$ और $D = \{1\}$ के बीच संबंधों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $n(C) = 2, n(D) = 1$ । संबंधों की संख्या = $2^{(2 \times 1)} = 2^2 = 4$

प्रश्न 19 (मध्यम). यदि समुच्चय $F = \{\text{राम, सीता, गीता}\}$ और $G = \{\text{आम, सेब}\}$ हैं, तो F से G में कुल कितने संबंध बन सकते हैं?

उत्तर – $n(F) = 3, n(G) = 2$ । संबंधों की संख्या = $2^{(3 \times 2)} = 2^6 = 64$

प्रश्न 20 (कठिन). अगर किसी समुच्चय K से समुच्चय L में कुल 32 संबंध बन सकते हैं और $n(L) = 5$ है, तो $n(K)$ कितना होगा?

उत्तर – संबंधों की संख्या = $2^{(n(K) \times n(L))} = 32$ । हम जानते हैं कि $32 = 2^5$ । तो $n(K) \times n(L) = 5$ । क्योंकि $n(L) = 5$ दिया है, तो $n(K) \times 5 = 5$, इसका मतलब $n(K) = 1$ होगा।

» फलन की परिभाषा

प्रश्न 21 (आसान). क्या $R = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$ एक फलन है यदि $A = \{a, b, c\}$ और $B = \{x, y, z\}$?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 22 (आसान). क्या $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$ एक फलन है यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{2, 3, 4\}$?

उत्तर – नहीं

प्रश्न 23 (मध्यम). क्या $R = \{(x, y) : y = x + 1, x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{2, 3, 4\}\}$ एक फलन है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 24 (कठिन). एक संबंध $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{N} \text{ और } x < 4\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए और बताइए क्या यह एक फलन है?

उत्तर – $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ । हाँ, यह एक फलन है क्योंकि प्रांत के प्रत्येक अवयव का केवल एक प्रतिबिंब है।

» वास्तविक मान फलन और वास्तविक फलन

प्रश्न 25 (आसान). क्या $f(x) = 1/x$, जहाँ $x \neq 0$, एक वास्तविक मान फलन है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 26 (आसान). क्या एक वास्तविक फलन हमेशा एक वास्तविक मान फलन होता है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 27 (मध्यम). अगर $f(x) = x$ है, जहाँ $x \neq 0$ है, तो क्या यह एक वास्तविक फलन है? क्यों?

उत्तर – हाँ, क्योंकि इसका प्रांत ($x \neq 0$) और परिसर ($x \neq 0$) दोनों ही वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय हैं।

प्रश्न 28 (कठिन). फलन $g(x) = \sin(x)$ के लिए, क्या यह एक वास्तविक मान फलन है और क्या यह एक वास्तविक फलन भी है? स्पष्ट करो।

उत्तर – हाँ, $g(x) = \sin(x)$ एक वास्तविक मान फलन है क्योंकि इसका परिसर $[-1, 1]$ वास्तविक संख्याओं का उपसमुच्चय है। यह एक वास्तविक फलन भी है क्योंकि इसका प्रांत सभी वास्तविक संख्याएँ हैं ($x \in \mathbb{R}$) और परिसर भी वास्तविक संख्याओं का उपसमुच्चय है।

» तत्समक फलन

प्रश्न 29 (आसान). यदि $f(x) = x$ एक तत्समक फलन है, तो $f(10)$ का मान क्या होगा?

उत्तर – 10

प्रश्न 30 (आसान). तत्समक फलन $f(x) = x$ के लिए, यदि आउटपुट -4 है, तो इनपुट क्या था?

उत्तर – -4

प्रश्न 31 (मध्यम). एक तत्समक फलन का प्रांत $\mathbb{R}$ (वास्तविक संख्याएँ) है, तो उसका परिसर क्या होगा?

उत्तर – $\mathbb{R}$ (वास्तविक संख्याएँ)

प्रश्न 32 (कठिन). क्या $f(x) = 2x$ एक तत्समक फलन है? कारण सहित बताइए।

उत्तर – नहीं, क्योंकि $f(x) = x$ की शर्त पूरी नहीं होती। यहाँ आउटपुट, इनपुट का दुगुना है, बराबर नहीं।

» अचर फलन

प्रश्न 33 (आसान). अचर फलन $f(x) = 7$ का परिसर क्या है?

उत्तर – $\{7\}$

प्रश्न 34 (आसान). क्या $f(x) = x+1$ एक अचर फलन है? हाँ या ना।

उत्तर – ना

प्रश्न 35 (मध्यम). यदि फलन $g(x) = 7$ है, तो इसका प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

उत्तर – प्रांत: $\mathbb{R}$, परिसर: $\{7\}$

प्रश्न 36 (कठिन). एक अचर फलन का आलेख हमेशा किस अक्ष के समांतर होता है?

उत्तर – x-अक्ष (horizontal line)

» बहुपद फलन

प्रश्न 37 (आसान). क्या $f(x) = 5x + 3$ एक बहुपद फलन है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 38 (आसान). क्या $g(x) = 7$ एक बहुपद फलन है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 39 (मध्यम). क्या $h(x) = x^2 + 4x$ एक बहुपद फलन है?

उत्तर – नहीं, क्योंकि x की घात -2 है, जो ऋणात्मक है।

प्रश्न 40 (कठिन). क्या $k(x) = x + x^3$ एक बहुपद फलन है?

उत्तर – नहीं, क्योंकि x का मतलब $x^{(1/2)}$ है, और घात $1/2$ एक भिन्न संख्या है।

» परिमेय फलन

प्रश्न 41 (आसान). क्या ' $f(x) = x / (x + 5)$ ' एक परिमेय फलन है?

उत्तर – हाँ

प्रश्न 42 (आसान). क्या ' $g(x) = x^3 + 2$ ' एक परिमेय फलन है?

उत्तर – नहीं (यह एक साधारण बहुपद फलन है, परिमेय फलन होने के लिए अंश और हर दोनों बहुपद होने चाहिए और हर में एक अलग से बहुपद होना चाहिए)

प्रश्न 43 (मध्यम). फलन ' $h(x) = (x^2 + 1) / (x^2 - 4)$ ' के लिए ' x ' के किन मानों पर यह अपरिभाषित होगा?

उत्तर – $x = 2$ और $x = -2$

प्रश्न 44 (कठिन). फलन ' $k(x) = (x^2 - 9) / (x - 3)$ ' को सरल करने के बाद, क्या यह अभी भी परिमेय फलन की शर्तों को पूरा करता है, और यदि हाँ, तो ' x ' के किस मान पर यह मूल रूप से अपरिभाषित था?

उत्तर – हाँ, सरल करने पर यह ' $x + 3$ ' बनता है, जो एक बहुपद है। लेकिन मूल फलन ' $x = 3$ ' पर अपरिभाषित था क्योंकि हर में ' $x - 3$ ' था।

» मापांक फलन

प्रश्न 45 (आसान). यदि $f(x) = |x|$ है, तो $f(3)$ का मान क्या होगा?

उत्तर – 3

प्रश्न 46 (आसान). यदि $f(x) = |x|$ है, तो $f(-2)$ का मान क्या होगा?

उत्तर – 2

प्रश्न 47 (मध्यम). यदि $f(x) = |x - 5|$ है, तो $f(3)$ का मान क्या होगा?

उत्तर – 2

प्रश्न 48 (कठिन). यदि $f(x) = |x + 2| - |x - 1|$ है, तो $f(-3)$ का मान क्या होगा?

उत्तर – -7

» चिह्न फलन

प्रश्न 49 (आसान). यदि $g(x) =$ चिह्न फलन है, तो $g(15)$ का मान क्या होगा?

उत्तर – 1

प्रश्न 50 (आसान). चिह्न फलन में $f(-0.5)$ का मान क्या है?

उत्तर – -1

प्रश्न 51 (मध्यम). चिह्न फलन का परिसर (Range) क्या है?

उत्तर – $\{-1, 0, 1\}$

प्रश्न 52 (कठिन). यदि $f(x) = \text{sgn}(x)$ है, तो $f(x) + f(-x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जब $x \neq 0$ हो।

उत्तर – 0 (क्योंकि यदि $x > 0$, तो $f(x)=1$, $f(-x)=-1$; योग 0. यदि $x < 0$, तो $f(x)=-1$, $f(-x)=1$; योग 0.)

» महत्तम पूर्णांक फलन

प्रश्न 53 (आसान). यदि $f(x) = [x]$, तो $f(4.1)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 4

प्रश्न 54 (आसान). यदि $f(x) = [x]$, तो $f(7)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 7

प्रश्न 55 (मध्यम). यदि $f(x) = [x]$, तो $f(-3.5)$ का मान क्या होगा?

उत्तर – -4

प्रश्न 56 (कठिन). यदि $f(x) = [x]$, और $[x] = 2$ है, तो x के संभावित मानों का अंतराल (interval) क्या होगा?

उत्तर – $2 \leq x < 3$

» वास्तविक फलनों का बीजगणित

प्रश्न 57 (आसान). यदि $f(x) = 2x$ और $g(x) = 5$ हैं, तो $(f + g)(x)$ क्या होगा?

उत्तर – $(f + g)(x) = 2x + 5$

प्रश्न 58 (आसान). यदि $f(x) = 4x^2$ है, तो $(2f)(x)$ क्या होगा?

उत्तर – $(2f)(x) = 8x^2$

प्रश्न 59 (मध्यम). यदि $f(x) = x - 3$ और $g(x) = x + 1$ हैं, तो $(fg)(x)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $(fg)(x) = (x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x - 3$

प्रश्न 60 (कठिन). यदि $f(x) = x^2 - 4$ और $g(x) = x - 2$ हैं, तो $(f/g)(x)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $(f/g)(x) = (x^2 - 4) / (x - 2) = (x - 2)(x + 2) / (x - 2) = x + 2$, जहाँ $x \neq 2$

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. मान लीजिए समुच्चय $A = \{1, 2\}$ और समुच्चय $B = \{a, b\}$ है। $A \times B$ ज्ञात कीजिए।

- › पहला समुच्चय A है, जिसके अवयव 1 और 2 हैं।
- › दूसरा समुच्चय B है, जिसके अवयव a और b हैं।
- › हमें A से एक अवयव लेना है और B से एक अवयव लेना है, और उनके क्रमित युग्म बनाने हैं।
- › पहला अवयव $(1, a)$ बनेगा।
- › दूसरा अवयव $(1, b)$ बनेगा।
- › फिर A के दूसरे अवयव को लेंगे।
- › तीसरा अवयव $(2, a)$ बनेगा।
- › चौथा अवयव $(2, b)$ बनेगा।
- › इन सभी क्रमित युग्मों को एक समुच्चय में लिख देंगे।

उत्तर – $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

उदाहरण 2. यदि $A = \{a, b, c\}$ और $B = \{1, 2\}$, तो $n(A \times B)$ ज्ञात कीजिए।

- › सबसे पहले, समुच्चय A में अवयवों की संख्या $(n(A))$ ज्ञात करें। यहाँ $n(A) = 3$ है।
- › फिर, समुच्चय B में अवयवों की संख्या $(n(B))$ ज्ञात करें। यहाँ $n(B) = 2$ है।
- › कार्तीय गुणन के गुणधर्म के अनुसार, $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ होता है।
- › इन मानों को सूत्र में रखें: $n(A \times B) = 3 \times 2$
- › गुणा करें।

उत्तर – $n(A \times B) = 6$

उदाहरण 3. मान लीजिए एक समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ है और दूसरा समुच्चय $B = \{1, 4, 9\}$ है। एक संबंध R को परिभाषित कीजिए A से B में, इस तरह कि ' x, y का वर्गमूल है', जहाँ $x \in A$ और $y \in B$ हो। इस संबंध को रोस्टर रूप में और तीर आरेख से दर्शाइए।

› सबसे पहले $A \times B$ के सभी क्रमित युग्म निकालते हैं। $A \times B = \{(1,1), (1,4), (1,9), (2,1), (2,4), (2,9), (3,1), (3,4), (3,9)\}$

› अब हम संबंध R की शर्त ' x, y का वर्गमूल है' देखते हैं। इसका मतलब है ' $y = x^2$ ' होना चाहिए।

› $A \times B$ के क्रमति युग्मों में से वे क्रमति युग्म चुनते हैं जो इस शर्त को पूरा करते हैं:

› $x = 1$ के लिए, $y = 1^2 = 1$. तो $(1,1)$ संबंध में है।

› $x = 2$ के लिए, $y = 2^2 = 4$. तो $(2,4)$ संबंध में है।

› $x = 3$ के लिए, $y = 3^2 = 9$. तो $(3,9)$ संबंध में है।

› रोस्टर रूप में $R = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$ ।

› तीर आरेख बनाने के लिए, एक तरफ समुच्चय A और दूसरी तरफ समुच्चय B के अवयव लिखते हैं। फिर A के उन अवयवों से तीर बनाते हैं जो संबंध में हैं। (1 से 1 की ओर तीर, 2 से 4 की ओर तीर, 3 से 9 की ओर तीर)।

उत्तर – संबंध R का रोस्टर रूप: $\{(1,1), (2,4), (3,9)\}$ । तीर आरेख में 1 से 1, 2 से 4, और 3 से 9 तक तीर बनाए जाएंगे।

उदाहरण 4. मान लीजिए समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और समुच्चय $B = \{2, 4, 6, 8\}$ है। A से B में एक संबंध $R = \{(x, y) : y = 2x, \text{ जहाँ } x \in A, y \in B\}$ परभाषित है। इस संबंध का प्रांत, परिसर और सह-प्रांत ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले हम संबंध R को रोस्टर रूप (roster form) में लिखेंगे। शर्त है ' $y = 2x$ '।

› $x = 1$ के लिए, $y = 2 \times 1 = 2$. तो क्रमति युग्म $(1, 2)$ संबंध में है।

› $x = 2$ के लिए, $y = 2 \times 2 = 4$. तो क्रमति युग्म $(2, 4)$ संबंध में है।

› $x = 3$ के लिए, $y = 2 \times 3 = 6$. तो क्रमति युग्म $(3, 6)$ संबंध में है।

› $x = 4$ के लिए, $y = 2 \times 4 = 8$. तो क्रमति युग्म $(4, 8)$ संबंध में है।

› तो संबंध $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ है।

› अब, संबंध के 'प्रथम घटकों' (first elements) का समुच्चय प्रांत होगा। इसमें 1, 2, 3, 4 हैं।

› संबंध के 'द्वितीय घटकों' (second elements) का समुच्चय परिसर होगा। इसमें 2, 4, 6, 8 हैं।

› और सह-प्रांत हमेशा 'द्वितीय समुच्चय' (second set) होता है जिससे संबंध बनाया गया है, जो यहाँ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ है।

उत्तर – प्रांत (Domain) = $\{1, 2, 3, 4\}$

परिसर (Range) = $\{2, 4, 6, 8\}$

सह-प्रांत (Co-domain) = $\{2, 4, 6, 8\}$

उदाहरण 5. मान लीजिए कि समुच्चय $A = \{1, 2\}$ और समुच्चय $B = \{a, b, c\}$ हैं। समुच्चय A से समुच्चय B में बनने वाले संबंधों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले हम समुच्चय A में अवयवों की संख्या निकालेंगे: $n(A) = 2$ ।

› फिर समुच्चय B में अवयवों की संख्या निकालेंगे: $n(B) = 3$ ।

› अब, कार्तीय गुणन $A \times B$ में अवयवों की कुल संख्या ज्ञात करेंगे: $n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 2 \times 3 = 6$ ।

› अंत में, A से B में बनने वाले संबंधों की कुल संख्या कार्तीय गुणन $A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या के बराबर होगी, जो कि $2^{n(A \times B)}$ होती है।

› तो, संबंधों की कुल संख्या = $2^6 = 64$ ।

उत्तर – A से B में बनने वाले संबंधों की कुल संख्या 64 है।

उदाहरण 6. जांचिए कि क्या $R = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$ एक फलन है, यदि R , समुच्चय $A = \{1,2,3,4\}$ से समुच्चय $B = \{2,4,6,8,10\}$ में परिभाषित है?

- › सबसे पहले, हमें प्रांत A के अवयवों को देखना है: $\{1, 2, 3, 4\}$ ।
- › अब, हर अवयव का प्रतिबिंब देखते हैं: 1 का प्रतिबिंब 2 है, 2 का प्रतिबिंब 4 है, 3 का प्रतिबिंब 6 है, और 4 का प्रतिबिंब 8 है।
- › क्या प्रांत का कोई अवयव ऐसा है जिसका कोई प्रतिबिंब न हो? नहीं, हर अवयव का प्रतिबिंब है।
- › क्या प्रांत का कोई अवयव ऐसा है जिसके एक से ज़्यादा प्रतिबिंब हों? नहीं, 1 का सिर्फ 2 है, 2 का सिर्फ 4 है, और इसी तरह।
- › क्योंकि प्रांत के 'प्रत्येक' अवयव का 'केवल एक ही' प्रतिबिंब है, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

उत्तर – हाँ, R एक फलन है।

उदाहरण 7. एक फलन $f(x) = x^2 + 2$ है, जहाँ x एक वास्तविक संख्या है। बताओ क्या यह एक वास्तविक मान फलन है? क्या यह एक वास्तविक फलन भी है?

- › पहला कदम: हमें समझना है कि ' x ' क्या है। यहाँ दिया गया है कि ' x ' एक वास्तविक संख्या (real number) है। तो इसका मतलब हुआ कि इस फलन का प्रांत (domain) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय (set of real numbers) है, या उसका कोई उपसमुच्चय।
- › दूसरा कदम: अब हम 'परिसर' (range) पर ध्यान देंगे। अगर हम $f(x) = x^2 + 2$ में कोई भी वास्तविक संख्या (positive या negative) डालते हैं, तो x^2 हमेशा एक गैर-ऋणात्मक (non-negative) संख्या आएगी। फरि उसमें 2 जोड़ने पर जो उत्तर मिलेगा, वह भी हमेशा एक वास्तविक संख्या ही होगी। जैसे अगर $x=0$ तो $f(x)=2$, अगर $x=1$ तो $f(x)=3$, अगर $x=-1$ तो $f(x)=3$ । ये सभी वास्तविक संख्याएँ हैं।
- › तीसरा कदम: क्योंकि इस फलन का परिसर (range) वास्तविक संख्याओं का एक उपसमुच्चय $\{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$ है, तो यह 'वास्तविक मान फलन' है।
- › चौथा कदम: क्योंकि इस फलन का प्रांत (domain) भी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका उपसमुच्चय है (यहाँ $x \in \mathbb{R}$), और इसका परिसर (range) भी वास्तविक संख्याओं का उपसमुच्चय है, इसलिए यह एक 'वास्तविक फलन' भी है।

उत्तर – हाँ, यह फलन एक वास्तविक मान फलन भी है और एक वास्तविक फलन भी है।

उदाहरण 8. तत्समक फलन $f(x) = x$ के लिए $f(3)$, $f(-1.5)$ और $f(2)$ के मान ज्ञात कीजिए और इसका आलेख किस तरह का होगा, यह बताइए।

- › पहला, $f(x) = x$ की परिभाषा का उपयोग करते हुए, $f(3) = 3$ होगा।
- › दूसरा, इसी तरह $f(-1.5) = -1.5$ होगा।
- › तीसरा, $f(2) = 2$ होगा, क्योंकि आउटपुट हमेशा इनपुट के बराबर होता है।
- › चौथा, आलेख के लिए, क्योंकि $f(x) = x$, तो यह एक सीधी रेखा होगी जो मूल बिंदु $(0,0)$ से होकर जाएगी और x -अक्ष तथा y -अक्ष के साथ 45° डिग्री का कोण बनाएगी। 'The graph is a straight line passing through the origin'.

उत्तर – $f(3) = 3$, $f(-1.5) = -1.5$, $f(2) = 2$. आलेख एक सीधी रेखा होगी जो मूल बिंदु $(0,0)$ से होकर जाती है।

उदाहरण 9. यदि $f(x) = -3$ एक अचर फलन है, तो इसका प्रांत, परिसर और आलेख बनाइए।

- › पहला कदम, हम फलन की पहचान करेंगे. 'Here, $f(x) = -3$ is a constant function'. यह एक अचर फलन है.
- › दूसरा कदम, प्रांत निर्धारित करेंगे. 'The domain for any constant function is all real numbers, $\mathbb{R}$ '. तो इसका प्रांत $\mathbb{R}$ होगा.
- › तीसरा कदम, परिसर निकालेंगे. 'The range of a constant function $f(x) = c$ is just $\{c\}$ '. यहाँ c का मान -3 है, तो परिसर $\{-3\}$ होगा.
- › चौथा कदम, आलेख बनाएंगे. 'The graph of $f(x) = -3$ will be a straight line parallel to the x -axis, passing through $y = -3$ '. हम y -अक्ष पर -3 पर एक बिंदु लगाएंगे और x -अक्ष के समांतर एक सीधी रेखा खींचेंगे जो उस बिंदु से होकर गुजरेगी. यह रेखा अनंत तक जाएगी.

उत्तर – प्रांत (Domain) = $\mathbb{R}$ (सभी वास्तविक संख्याएँ)

परिसर (Range) = $\{-3\}$

आलेख: $y = -3$ पर x -अक्ष के समांतर एक सीधी रेखा।

उदाहरण 10. जाँच कीजिए कि क्या $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ एक बहुपद फलन है या नहीं।

- › सबसे पहले, हम फलन के रूप को देखेंगे: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ ।
- › अब, हम ' x ' की घातों को ध्यान से देखेंगे। पहले पद ' x^3 ' में घात 3 है।
- › दूसरे पद ' x^2 ' में घात 2 है।
- › आखिरी पद '2' को हम ' $2x$ ' लिख सकते हैं, तो यहाँ घात 0 है।
- › चूँकि सभी घातें (3, 2, और 0) ऋणेतर पूर्णांक हैं, और गुणांक (1, -1, 2) वास्तविक संख्याएँ हैं, तो यह बहुपद फलन की परिभाषा को पूरा करता है।

उत्तर – हाँ, $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ एक बहुपद फलन है।

उदाहरण 11. जाँच कीजिए कि ' $f(x) = (x^2 + 3x + 2) / (x - 1)$ ' एक परिमेय फलन है या नहीं। यदि हाँ, तो ' x ' के किन मानों के लिए यह अपरिभाषित होगा?

- › सबसे पहले, हम देखेंगे कि क्या 'अंश' (numerator) और 'हर' (denominator) दोनों बहुपद फलन हैं।
- › यहाँ, अंश ' $p(x) = x^2 + 3x + 2$ ' है। इसमें ' x ' की घातें 2, 1, 0 (याद है, 2 को $2x$ लिख सकते हैं) हैं, जो सभी 'non-negative integers' हैं। तो यह एक बहुपद फलन है।
- › और हर ' $q(x) = x - 1$ ' है। इसमें ' x ' की घातें 1, 0 हैं, जो भी 'non-negative integers' हैं। तो यह भी एक बहुपद फलन है।
- › क्योंकि दोनों ' $p(x)$ ' और ' $q(x)$ ' बहुपद हैं, तो यह एक परिमेय फलन है।
- › अब, यह कहाँ अपरिभाषित होगा? जहाँ 'हर' शून्य होगा। यानी ' $q(x) = 0$ '।
- › तो, ' $x - 1 = 0$ ' रखेंगे।
- › इससे हमें ' $x = 1$ ' मिलता है।

उत्तर – हाँ, ' $f(x) = (x^2 + 3x + 2) / (x - 1)$ ' एक परिमेय फलन है। यह ' $x = 1$ ' के लिए अपरिभाषित होगा।

उदाहरण 12. मान लीजिए एक मापांक फलन $f(x) = |x|$ है। आपको $f(7)$, $f(-10)$, और $f(0)$ का मान ज्ञात करना है।

- › पहला मान है $f(7)$ । यहाँ $x = 7$ है, जो कि 0 से बड़ा है ($x > 0$)। तो परिभाषा के अनुसार, $f(7) = 7$ होगा।
- › दूसरा मान है $f(-10)$ । यहाँ $x = -10$ है, जो कि 0 से छोटा है ($x < 0$)। तो परिभाषा के अनुसार, $f(-10) = -(-10)$ होगा।
- › ' $-(-10)$ ' का मतलब है 'negative' और 'negative' मिलकर 'positive' हो जाते हैं, तो $f(-10) = 10$ होगा।
- › तीसरा मान है $f(0)$ । यहाँ $x = 0$ है, जो कि 0 के बराबर है ($x = 0$)। तो परिभाषा के अनुसार, $f(0) = 0$ होगा।

उत्तर – $f(7) = 7$, $f(-10) = 10$, और $f(0) = 0$

उदाहरण 13. यदि $f(x)$ एक चिह्न फलन है, तो $f(7)$, $f(-12)$, और $f(0)$ के मान ज्ञात कीजिए।

- › हमें चिह्न फलन की परिभाषा का उपयोग करना है।
- › $f(7)$ के लिए, चूँकि $7 > 0$ है, इसलिए फलन का मान 1 होगा।
- › $f(-12)$ के लिए, चूँकि $-12 < 0$ है, इसलिए फलन का मान -1 होगा।
- › $f(0)$ के लिए, चूँकि $x = 0$ है, इसलिए फलन का मान 0 होगा।

उत्तर – $f(7) = 1$, $f(-12) = -1$, $f(0) = 0$

उदाहरण 14. $f(x) = [x]$ के लिए $f(0.5)$, $f(1.9)$, $f(-0.2)$ और $f(-2.7)$ के मान ज्ञात कीजिए।

- › पहला, $f(0.5)$ के लिए: 0.5 से कम या उसके बराबर सबसे बड़ा पूर्णांक 0 है। तो, $[0.5] = 0$ ।
- › दूसरा, $f(1.9)$ के लिए: 1.9 से कम या उसके बराबर सबसे बड़ा पूर्णांक 1 है। तो, $[1.9] = 1$ ।
- › तीसरा, $f(-0.2)$ के लिए: -0.2 से कम या उसके बराबर सबसे बड़ा पूर्णांक -1 है। ध्यान देना, -0.2 से बड़ा पूर्णांक 0 है और -0.2 से छोटा पूर्णांक -1 है। तो हमें 'कम या बराबर' वाला सबसे बड़ा चाहिए, जो -1 है। तो, $[-0.2] = -1$ ।
- › चौथा, $f(-2.7)$ के लिए: -2.7 से कम या उसके बराबर सबसे बड़ा पूर्णांक -3 है। तो, $[-2.7] = -3$ ।

उत्तर – $f(0.5) = 0$, $f(1.9) = 1$, $f(-0.2) = -1$, $f(-2.7) = -3$

उदाहरण 15. मान लीजिए कि $f(x) = x^2$ और $g(x) = x + 2$ दो वास्तविक फलन हैं। तो $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(3f)(x)$, $(fg)(x)$ और $(f/g)(x)$ ज्ञात कीजिए।

- › पहला, $(f + g)(x)$ निकालते हैं। इसकी परिभाषा है ' $f(x) + g(x)$ '. तो हम बस $f(x)$ और $g(x)$ को जोड़ देंगे: $x^2 + (x + 2) = x^2 + x + 2$.
- › दूसरा, $(f - g)(x)$ निकालते हैं। इसकी परिभाषा है ' $f(x) - g(x)$ '. तो हम $f(x)$ में से $g(x)$ को घटा देंगे: $x^2 - (x + 2) = x^2 - x - 2$. ध्यान देना, यहाँ $g(x)$ के दोनों पदों का चिन्ह बदल जाएगा.
- › तीसरा, $(3f)(x)$ निकालते हैं। यह 'scalar multiplication' है। इसकी परिभाषा है ' $3 * f(x)$ '. तो हम $f(x)$ को 3 से गुणा कर देंगे: $3 * (x^2) = 3x^2$.
- › चौथा, $(fg)(x)$ निकालते हैं। इसकी परिभाषा है ' $f(x) * g(x)$ '. तो हम $f(x)$ और $g(x)$ को गुणा कर देंगे: $x^2 * (x + 2)$. अब इसे अंदर गुणा करेंगे तो मिलेगा $x^3 + 2x^2$.
- › पाँचवाँ, $(f/g)(x)$ निकालते हैं। इसकी परिभाषा है ' $f(x) / g(x)$ '. तो हम $f(x)$ को $g(x)$ से भाग देंगे: $x^2 / (x + 2)$. यहाँ एक बात बहुत ज़रूरी है कि 'the denominator, $x+2$, must not be zero.' मतलब $x + 2 \neq 0$, तो $x \neq -2$. अगर x का मान -2 हो जाए, तो ये फलन परिभाषित नहीं होगा।

उत्तर – $(f + g)(x) = x^2 + x + 2$

$(f - g)(x) = x^2 - x - 2$

$(3f)(x) = 3x^2$

$(fg)(x) = x^3 + 2x^2$

$(f/g)(x) = x^2 / (x + 2)$, जहाँ $x \neq -2$

बोर्ड परीक्षा के लिए खास

- यह अवधारणा 'संबंध' और 'फलन' जैसे बड़े और महत्वपूर्ण विषयों की नींव है, इसलिए इसे बहुत ध्यान से समझना। इस पर सीधे प्रश्न भले ही न आएँ, पर यह अगले टॉपिक्स को समझने के लिए बहुत ज़रूरी है।
- क्रमित युग्मों की समानता पर आधारित प्रश्न अक्सर 1-2 अंक में पूछे जाते हैं, जहाँ आपको अज्ञात चर (variables) का मान ज्ञात करना होता है।
- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि इससे अक्सर सीधे प्रश्न पूछे जाते हैं, खासकर जब संबंध को रोस्टर रूप या समुच्चय निर्माण रूप में दिया गया हो।
- यह प्रश्न '1 नंबर या 2 नंबर' के छोटे प्रश्नों में अक्सर पूछा जाता है। बस $n(A)$ और $n(B)$ सही से गिनकर 2 की घात में रखना है, कोई जटिल गणना नहीं होती।
- बोर्ड परीक्षा में, 'वास्तविक मान फलन' और 'वास्तविक फलन' की परिभाषा और उदाहरणों पर आधारित प्रश्न अक्सर आते हैं। प्रांत और परिसर को ठीक से पहचानना सीखो।
- तत्समक फलन की परिभाषा, प्रांत, परिसर और आलेख को समझना बोर्ड परीक्षा के लिए महत्वपूर्ण है। एक नंबर का सवाल आ सकता है कि 'What is the range of an identity function?'
- अचर फलन का परिसर केवल $\{c\}$ होता है, $\mathbb{R}$ नहीं - यह याद रखना, खासकर 'MCQs' में।

- बोर्ड परीक्षा में, बहुपद फलन को पहचानने और उसके गुणों पर आधारित छोटे प्रश्न आ सकते हैं, खासकर घातों की शर्त पर ध्यान देना।
- परिमेय फलन के प्रांत (domain) निकालने वाले प्रश्न अक्सर बोर्ड परीक्षा में आते हैं। हमेशा हर को शून्य के बराबर रखकर उन 'x' मानों को निकालना न भूलें जहाँ फलन अपरिभाषित होता है।
- मापांक फलन का ग्राफ 'V' आकार का होता है, जो 'y-axis' पर 0,0 से शुरू होता है। ग्राफ बनाते समय इस बात का ध्यान रखना, यह अक्सर 'exam' में पूछा जाता है।
- चिह्न फलन के ग्राफ से जुड़े सवाल बोर्ड परीक्षा में अक्सर आते हैं, खासकर इसके प्रांत और परिसर पर ध्यान देना।
- महत्तम पूर्णांक फलन का आलेख (graph) सीढ़ी जैसा बनता है, जिसे 'स्टेप फंक्शन' भी कहते हैं। बोर्ड परीक्षा में इसका ग्राफ बनाने को अक्सर पूछा जाता है, तो ध्यान से अभ्यास कर लेना।
- यह विषय 'संबंध एवं फलन' अध्याय का बहुत महत्वपूर्ण हिस्सा है, खासकर 2 अंकों के प्रश्न में 'फलनों के बीजगणित' पर आधारित सवाल आते हैं। उदाहरण 16 और 17 जैसे प्रश्न सीधे परीक्षा में आते हैं, इसलिए इन्हें अच्छे से अभ्यास करें।

एक नज़र में रिवीज़न

- › कार्तीय गुणन = दो समुच्चयों के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय ($P \times Q$)
- › क्रमित युग्म समानता: संगत घटक बराबर; $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$; अपरिमित समुच्चय का गुणन अपरिमित।
- › प्रांत: प्रथम घटक; परिसर: द्वितीय घटक; सह-प्रांत: पूरा द्वितीय समुच्चय
- › संबंधों की कुल संख्या = $2^{(n(A) * n(B))}$
- › वास्तविक मान फलन: परिसर R ; वास्तविक फलन: प्रांत व परिसर दोनों R ।
- › $f(x) = x$; प्रांत = R , परिसर = R ; मूल बढ़ि से सीधी रेखा।
- › $f(x) = c$; प्रांत R , परिसर $\{c\}$; आलेख x-अक्ष के समांतर रेखा।
- › बहुपद फलन: चर की घात हमेशा ऋणतर पूर्णांक हो।
- › परिमेय फलन = दो बहुपदों का अनुपात, हर 0
- › मापांक फलन $f(x) = |x|$, हमेशा धनात्मक मान, $f(x) = x$ ($x \geq 0$), $f(x) = -x$ ($x < 0$)
- › चिह्न फलन: $x > 0$ पर 1, $x < 0$ पर -1, $x = 0$ पर 0। प्रांत R , परिसर $\{-1, 0, 1\}$ ।
- › महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$: x से कम या बराबर सबसे बड़ा पूर्णांक।
- › फलनों का योग, व्यवकलन, गुणन, अदिश गुणन, भागफल परिभाषित है।